Concours des 26, 27 et 28 mai 1986 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

***

MATHÉMATIQUES

(OPTION M)

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

.°.

NOTATIONS : $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

Dans tout le problème les lettres n et p désignent des entiers strictement positifs et la lettre k désigne un entier de signe quelconque.

Les lettres t et x désignent des variables réelles.

PARTIE I

1° - Démontrer l'existence du nombre $\lim_{t \to k\pi} \sin nt/\sin t$

Quelle est sa valeur ?

2° - On pose pour tout réel t, non multiple de π

$$f_n(t) = \sin nt/\sin t \qquad (t \neq k\pi)$$

Montrer que la fonction f_n peut être prolongée par continuité à $\mathbb{R}$ entier. Ce prolongement sera noté également f_n dans ce qui suit.

3° - Exprimer f_n sous la forme d'une somme finie d'exponentielles, puis sous la forme d'une somme finie de fonctions circulaires.

En déduire la valeur de l'intégrale : $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t)\, dt$

On distinguera le cas où n est pair du cas où n est impair.

4° - Démontrer que $\lim_{n \to \infty} (I_{2n+1} - I_{2n}) = 0$.

5° - On pose :

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \qquad (n > 0)$$

a) Prouver la convergence de la série de terme général u_n.

b) En utilisant les résultats des questions précédentes, calculer la somme de cette série.

6° - Montrer que pour tout entier $n > 0$, on peut écrire :

$$(f_n(t))^2 = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \lambda_{n,k}\ e^{2ikt}$$

et déterminer les nombres $\lambda_{n,k}$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

7° - Soit p un entier strictement positif. On pose :

$$J_{n,p} = \int_0^{\pi/2} (f_n(t))^{2p}\, dt$$

a) Calculer $J_{n,p}$ pour p = 1 et p = 2.

b) Montrer que pour tout entier n > 0 et tout entier p > 0 $\quad J_{n,p} \geqslant (2n/\pi)^{2p-1}$.

INDICATION : On pourra utiliser en la démontrant l'inégalité sin t $\geqslant 2t/\pi$ où $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

PARTIE II

Dans toute cette partie et dans toute la suite f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, périodique de période 2π et pourvue d'une dérivée continue :

$$f(x + 2\pi) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Soit δ un nombre strictement positif.

1° - Montrer que le sous-ensemble $A(\delta)$ de $\mathbb{R}$ qui est défini par :

$$A(\delta) = \{ Z = |f(x) - f(y)| : |x - y| \leqslant \delta \}$$

est borné supérieurement.

2° - On désigne par $\omega(\delta)$ la borne supérieure de $A(\delta)$.

Montrer qu'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que pour tout $\delta > 0$, on ait :

$$\omega(\delta) \leqslant K\, \delta$$

3° - Montrer que la fonction ω est croissante.

4° - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'inégalité :

$$\omega(n\, \delta) \leqslant n\, \omega(\delta)$$

En déduire que pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$\omega(\lambda\, \delta) \leqslant (\lambda + 1)\, \omega(\delta).$$

En utilisant ce résultat, montrer que pour tout entier n et tout t > 0

$$\omega(2t) \leqslant (2\, nt + 1)\, \omega(1/n).$$

PARTIE III

1° - Vérifier par récurrence l'inégalité $\quad |\sin nt| \leqslant n\, |\sin t| \qquad (n > 0,\ t \in \mathbb{R})$

2° - La fonction f_n étant celle de la première partie, on pose pour tout p > 1 :

$$K_{n,p} = \int_0^{\pi/2} t\, (f_n(t))^{2p}\, dt$$

Démontrer l'inégalité suivante : $\quad K_{n,p} \leqslant \dfrac{\pi^2}{8(p-1)} (pn^{2p-2} - 1)$

INDICATION : décomposer l'intégrale définissant $K_{n,p}$ sous la forme d'une somme de deux intégrales :

$$\int_0^{\pi/2} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi/2} \qquad (0 < \alpha < \pi/2)$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE IV

Les notations étant celles des parties I, II et III, on pose :

$$U_{n,p}(x) = \frac{1}{4 J_{n,p}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[f_n\left(\frac{t - x}{2}\right)\right]^{2p} dt \qquad (p > 1)$$

1° - Vérifier que $U_{n,p}$ est un polynôme trigonométrique de la forme :

$$U_{n,p}(x) = a_o + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos k\,x + b_k \sin k\,x) \qquad (N \in \mathbb{N}^*)$$

où a_o, a_k et b_k sont des nombres complexes que l'on ne cherchera pas à calculer.

2° - Etablir l'égalité :

$$U_{n,p}(x) = \frac{1}{2 J_{n,p}} \int_{0}^{\pi/2} \left(f(x + 2t) + f(x - 2t) \right) [f_n(t)]^{2p} dt$$

Qu'obtient-on si f est la fonction constante égale à 1 ?

En déduire que :

$$U_{n,p}(x) - f(x) = \frac{1}{2 J_{n,p}} \int_{0}^{\pi/2} [f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x)] [f_n(t)]^{2p} dt$$

3° - Montrer qu'il existe un nombre M(p) tel que pour tout entier $n > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait :

$$|f(x) - U_{n,p}(x)| \leqslant M(p)\, \omega(1/n)$$

Vérifier en particulier que $M(2) = 6$ convient.

Quelle conclusion déduisez-vous des résultats de la question précédente ?

-§-